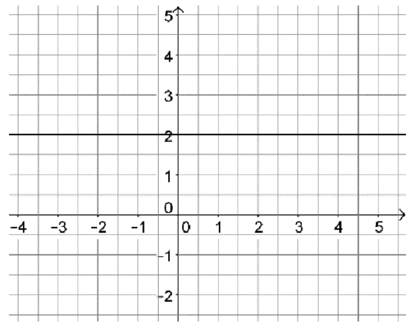
Überblick: Funktionen und ihre Graphen

1. Konstante Funktion: $f(x) = c$



Nullstellen: entweder keine oder ganz ℝ (wenn $c = 0$)

Polstellen / Definitionslücken: keine

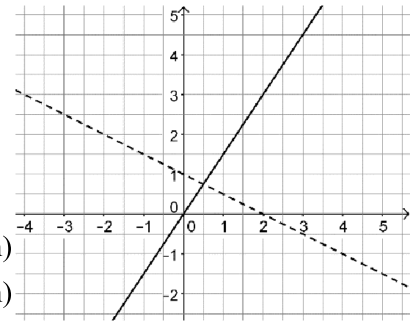
Symmetrie: Achsensymmetrie zur y-Achse;
für $c = 0$ auch PuSy zum Ursprung und ASy zur x-Achse

Asymptoten: die Funktion ist ihre eigene Asymptote

Ableitung: $f'(x) = 0$

Stammfunktion: $F(x) = c \cdot x + C$ (also eine lineare Funktion mit Steigung c)

2. Lineare Funktion: $f(x) = mx + t$, $m \neq 0$ (Spezialfall $t = 0$: Ursprungsgerade)



Nullstellen: genau eine NS, nämlich $x_0 = -\frac{t}{m}$

Nullstellenform: $f(x) = m\left(x + \frac{t}{m}\right)$

Polstellen / Definitionslücken: keine

Symmetrie: allgemein keine; für $t = 0$ Punktsymmetrie zum Ursprung

Grenzwerte:
für $a < 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (von li. oben nach re. unten)
für $a > 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (von li. unten nach re. oben)

Asymptoten: die Funktion ist ihre eigene Asymptote

Ableitung: $f'(x) = m$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{m}{2} \cdot x^2 + t \cdot x + C$ (also eine quadratische Funktion)

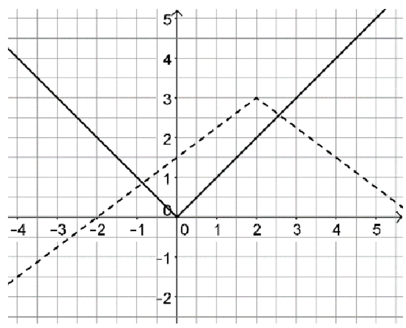
3. Betragsfunktion: $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x > 0 \end{cases}$ / allgemein: $g(x) = a \cdot |bx + c| + d$

Nullstellen von f: genau eine NS, nämlich $x_0 = 0$

Polstellen / Definitionslücken: keine (aber Knick bei $x = 0$ bzw. $x = -\frac{c}{b}$!)

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ (von links oben nach rechts oben)

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \begin{cases} -\infty & \text{für } a < 0 \\ \infty & \text{für } a > 0 \end{cases}$$



Asymptoten: die Funktion ist ihre eigene Asymptote;
Achtung: zwei verschiedene Asymptoten für $x \to \pm\infty$!

Symmetrie von f: Achsensymmetrie zur y-Achse

Ableitung: $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ +1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$ (Definitionslücke bei $x = 0$!)

$g'(x) = \begin{cases} -ab & \text{für } bx < c \\ +ab & \text{für } bx > c \end{cases}$ (Definitionslücke bei $x = -\frac{c}{b}$)

Stammfunktion: $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + C_1 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + C_2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

4. Quadratische Funktion: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (das ist die sog. Normalform)

Nullstellen: abhängig vom Wert der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$:
keine NS für $D < 0$; eine NS für $D = 0$, und zwar $x_0 = -\frac{b}{2a}$; zwei NS für $D > 0$, und zwar $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

Nullstellenform: nicht möglich für $D < 0$; $f(x) = a(x - x_0)^2$ für $D = 0$; $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ für $D > 0$

Scheitelpunktform: $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ mit Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$; $x_S = \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ (mittig zwischen NS)
hier gibt a die Streckung der Parabel in y-Richtung an, x_S die Verschiebung in x-Richtung und y_S die in y-Richtung

Polstellen / Definitionslücken: keine

Symmetrie: allgemein keine; für $b = 0$ (bzw. $x_S = 0$) ASy zur y-Achse

Grenzwerte:

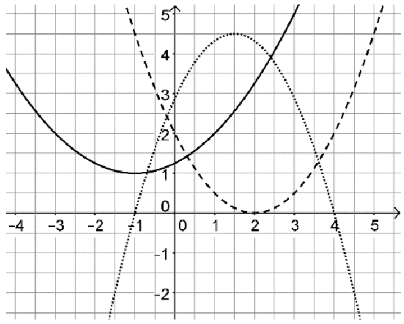
für $a < 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (von li. unten nach re. unten)

für $a > 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (von li. oben nach re. oben)

Asymptoten: keine linearen Asymptoten

Ableitung: $f'(x) = 2ax + b$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + C$



5. Potenzfunktion/Wurzelfunktion: $f(x) = a \cdot x^n$

a) $n \in \mathbb{N}$

Nullstellen: genau eine NS, nämlich $x_0 = 0$; für ungerade n: NS mit VZW / für gerade n: NS ohne VZW

Gemeinsame Punkte: $f(0) = 0$, $f(1) = a$, $f(-1) = \pm a$ (je nachdem, ob n gerade / ungerade)

Polstellen / Definitionslücken: keine

Symmetrie: für n ungerade Punktsymmetrie zum Ursprung; für n gerade Achsensymmetrie zur y-Achse

Grenzwerte:

$a < 0$, n ungerade: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (li. oben → re. unten)

$a < 0$, n gerade: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (li. unten → re. unten)

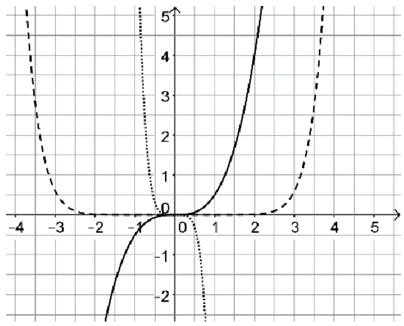
$a > 0$, n ungerade: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (li. unten → re. oben)

$a > 0$, n gerade: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (li. oben → re. oben)

Asymptoten: für $n > 1$ keine linearen Asymptoten

Ableitung: $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$



b) $n \in \mathbb{Z}^-$: negative Potenz $n = -m$: $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$

Nullstellen: keine

Polstellen / Def.lücken: genau eine PS: $x_0 = 0$; für ungerade n: PS mit VZW / für gerade n: PS ohne VZW

Gemeinsame Punkte: $f(1) = a$, $f(-1) = \pm a$ (je nachdem, ob n gerade / ungerade)

Symmetrie: für n ungerade Punktsymmetrie zum Ursprung; für n gerade Achsensymmetrie zur y-Achse

Grenzwerte: $a < 0$, n ungerade: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +0$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -0$ / $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = +\infty$ / $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$

$a < 0$, n gerade: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -0$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -0$ / $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$ / $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$

$a > 0$, n ungerade: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -0$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +0$ / $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$ / $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$

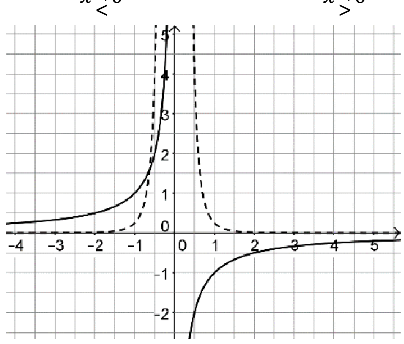
$a > 0$, n gerade: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +0$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +0$ / $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = +\infty$ / $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$

Asymptoten: für $x \to \pm\infty$: senkrechte Asymptote $x = 0$;
für $x \to 0$: waagrechte Asymptote $y = 0$

Ableitung: $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$

Stammfunktion: für $n \neq -1$: $F(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$

Sonderfall $n = -1$ ($f(x) = \frac{1}{x}$): $F(x) = \ln|x| + C$



c) $n \in \mathbb{Q}$: rationale Potenz $n = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$: $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$ ⇨ **Wurzelfunktion**

Nullstellen: genau eine NS, nämlich $x_0 = 0$

Polstellen / Definitionslücken: nicht definiert für $x < 0$ (auch wenn der TR für z.B. $\sqrt[3]{-8}$ eine Lösung angibt)

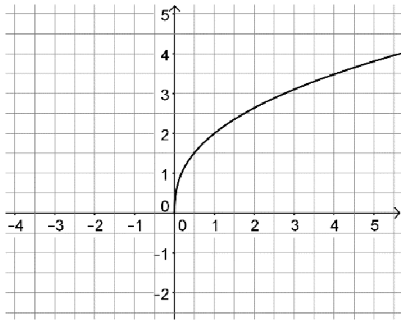
Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[q]{x} = +\infty$ (auch wenn der Funktionswert immer langsamer ansteigt)

Asymptoten: keine!

Symmetrie: da nur für positive x definiert: keine

Ableitung: $f'(x) = a \cdot n x^{n-1} = a \cdot \frac{p}{q} x^{\frac{p-q}{q}}$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C = \frac{a \cdot q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}} + C$



6. Ganzrationale Funktion (Polynomfunktion) *n*. Ordnung: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$

Nullstellen: für n ungerade: zwischen 1 und n NS möglich / für n gerade: zwischen 0 und n NS möglich
Raten von NS (ganzzahlige NS sind Teiler von a_0) und Polynomdivision, bis der Grad des Restpolynoms auf 2 gesunken ist, dann Lösungsformel
bei k-fachen NS: k ungerade ⇨ NS mit VZW / k gerade ⇨ NS ohne VZW

Nullstellenform: $f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot g(x)$; $g(x)$ ist ggf. Polynom geradzahliger Ordnung ohne NS

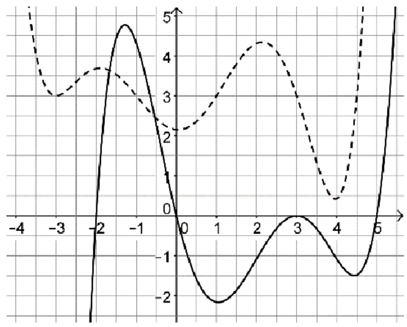
Polstellen / Definitionslücken: keine

Symmetrie: falls nur geradzahlige Potenzen auftreten: ASy zur y-Achse
falls nur ungeradzahlige Potenzen auftreten: PuSy zum Ursprung
in allen übrigen Fällen: keine Symmetrie

Grenzwerte: betrachte nur die höchste Potenz, also den Term $a_n \cdot x^n$,
und wende die Regeln aus 5a) an

Asymptoten: für $n > 1$ keine linearen Asymptoten

Ableitung / Stammfunktion: Summanden einzeln ableiten/integrieren, siehe 5a)



7. Gebrochenrationale Funktion: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome vom Grad z bzw. n sind

Nullstellen: alle NS des Zählerpolynoms $p(x)$, sofern der Nenner dort nicht ebenfalls 0 ist (siehe 6)

Polstellen / Definitionslücken: alle NS des Nennerpolynoms $q(x)$; Polstellen sind es nur, wenn es keine hebbaren Definitionslücken sind, also wenn der Zähler dort nicht ebenfalls 0 ist
bei k-fachen PS: : k ungerade ⇨ PS mit VZW / k gerade ⇨ PS ohne VZW

Symmetrie: falls $p(x)$ und $q(x)$ gleiche Symmetrie haben: Achsensymmetrie zur y-Achse
falls $p(x)$ und $q(x)$ unterschiedliche Symmetrie haben: Punktsymmetrie zum Ursprung
falls mindestens eine der beiden Funktionen $p(x)$ oder $q(x)$ keine Symmetrie hat: nicht symmetrisch

Grenzwerte / Asymptoten: abhängig von der Parität (gerade/ungerade) von Zählergrad z und Nennergrad n sowie den Koeffizienten der jeweils höchsten Potenz ($a_z x^z$ im Zähler und $b_n x^n$ im Nenner) gilt jeweils für die Vorzeichen:

- gleiche Parität von z und n, gleiches Vorzeichen von a_z und b_n ⇨ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) > 0$
- gleiche Parität von z und n, unterschiedliche Vorzeichen von a_z und b_n ⇨ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) < 0$
- unterschiedliche Parität von z und n, gleiches Vorzeichen von a_z und b_n ⇨ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) > 0$
- unterschiedliche Parität von z und n, unterschiedl. Vorzeichen von a_z und b_n ⇨ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$

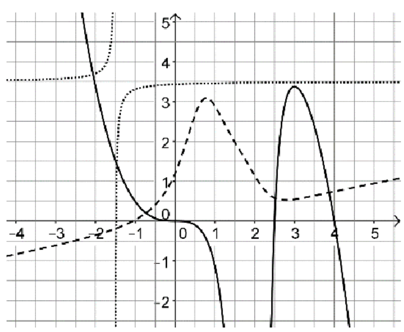
für $z < n$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ (waagrechte Asymptote $y = 0$)

für $z = n$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_z}{b_n}$ (waagrechte Asymptote $y = \frac{a_z}{b_n}$)

für $z > n$: $\left| \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \right| = \infty$ (Vorzeichen s.o.) Spezialfall: $z = n + 1$ ⇨ schräge Asymptote $y = mx + t$;
die Geradengleichung ergibt sich durch Polynomdivision $p(x) : q(x)$ und Vernachlässigung des Rests

Ableitung: im Allgemeinen kompliziert, Anwendung der Quotientenregel!

Stammfunktion: im Allgemeinen für uns unlösbare Fragestellung!



8. Exponentialfunktion: $f(x) = a \cdot b^x$ mit $b > 0$ (Spezialfall: natürliche Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot \mathrm{e}^x$)

Nullstellen: keine

Polstellen / Definitionslücken: keine

Symmetrie: keine

Gemeinsame Punkte: $f(0) = a$ (da $b^0 = 1$ für alle b)

Grenzwerte: Variationen:

a) $a > 0$, $f(x) = a \cdot b^x$ („normal“, Wertemenge $\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$)

b) $a < 0$, $f(x) = a \cdot b^x$ (an x-Achse gespiegelt, Wertemenge $\mathbb{R}^-$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$)

c) $a > 0$, $f(x) = a \cdot b^{-x}$ (an y-Achse gespiegelt, Wertemenge $\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +0$)

d) $a < 0$, $f(x) = a \cdot b^{-x}$ (punktgespiegelt am Ursprung, Wertemenge $\mathbb{R}^-$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -0$)

e) $a > 0$, $f(x) = a \cdot b^{-x^2}$ (Gaußsche Glockenkurve, Wertemenge $]0; a]$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +0$)

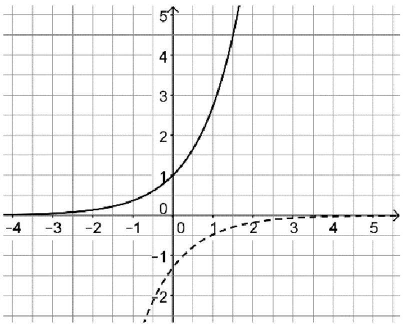
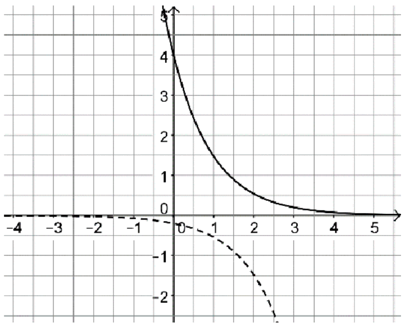
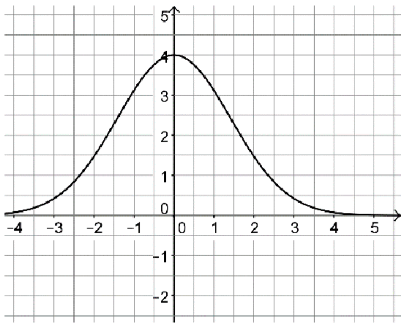
Asymptoten: waagrechte Asymptote $y = 0$ jeweils auf einer Seite im Unendlichen (bei e) auf beiden Seiten)

Ableitung Spezialfall: $f(x) = a \cdot \mathrm{e}^x \Rightarrow f'(x) = a \cdot \mathrm{e}^x$ / $f(x) = a \cdot \mathrm{e}^{k\cdot x} \Rightarrow f'(x) = a \cdot k \cdot \mathrm{e}^{k\cdot x}$

Ableitung allgemein: $f(x) = a \cdot b^x = a \cdot \mathrm{e}^{\ln b^x} = a \cdot \mathrm{e}^{x\cdot\ln b} \Rightarrow f'(x) = a \cdot \ln b \cdot \mathrm{e}^{x\cdot\ln b} = a \cdot \ln b \cdot b^x$

Stammfunktion Spezialfall: $f(x) = a \cdot \mathrm{e}^x \Rightarrow F(x) = a \cdot \mathrm{e}^x + C$ / $f(x) = a \cdot \mathrm{e}^{k\cdot x} \Rightarrow F(x) = \frac{a}{k} \cdot \mathrm{e}^{k\cdot x} + C$

Stammfunktion allgemein: $f(x) = a \cdot b^x = a \cdot \mathrm{e}^{x\cdot\ln b} \Rightarrow F(x) = \frac{a}{\ln b} \cdot \mathrm{e}^{x\cdot\ln b} + C = \frac{a}{\ln b} \cdot b^x + C$

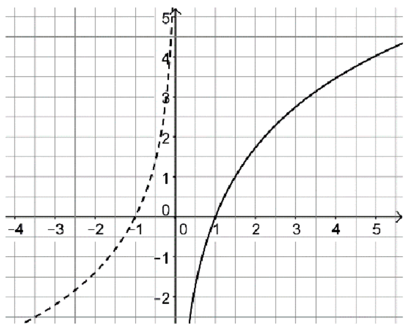
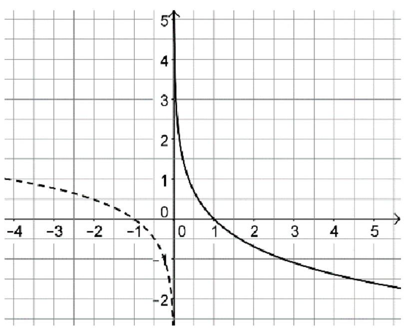




9. Logarithmusfunktion: $f(x) = \log_b x$ mit $b > 0$ (Spezialfall: natürlicher Logarithmus $f(x) = \ln x$)

Nullstellen / gemeinsame Punkte:
$f(1) = 0$ (denn $b^0 = 1$ für alle b)
$\log_b b = 1$, speziell $\ln \mathrm{e} = 1$

Polstellen / Definitionslücken:
nur für $x > 0$ definiert;
PS für $x \to 0$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$

Symmetrie: keine

Grenzwerte / Asymptoten:
siehe PS (senkrechte Asymptote $x = 0$); $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (keine Asymptote)

Variationen:

a) $a > 0$, $f(x) = a \cdot \ln x$ („normal“, D = $\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$)

b) $a < 0$, $f(x) = a \cdot \ln x$ (an x-Achse gespiegelt, D = $\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$)

c) $a > 0$, $f(x) = a \cdot \ln(-x)$ (an y-Achse gespiegelt, D = $\mathbb{R}^-$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$, , $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$)

d) $a < 0$, $f(x) = a \cdot \ln(-x)$ (punktgespiegelt am Ursprung, D = $\mathbb{R}^-$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$)

Ableitung Spezialfall: $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ / $f(x) = a \cdot \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{x}$

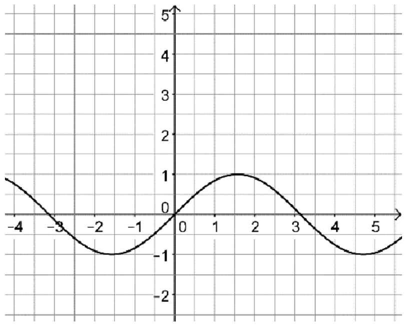
Ableitung allgemein: $f(x) = \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{1}{\ln b} \cdot \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{\ln b}}{x} = \frac{1}{x\cdot\ln b}$

Stammfunktion Spezialfall: $f(x) = \ln x \Rightarrow F(x) = x \cdot \ln x + C$ / $f(x) = a \cdot \ln x \Rightarrow F(x) = a \cdot x \cdot \ln x + C$

Stammfunktion allgemein: $f(x) = \log_b x = \frac{1}{\ln b} \cdot \ln x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln b} \cdot x \cdot \ln x + C = \frac{x\cdot\ln x}{\ln b} + C$

10. Trigonometrische Funktionen:

a) $\boldsymbol{f(x) = \sin x}$ / allgemein: $\boldsymbol{g(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d}$



Nullstellen von f: $x = k \cdot \pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ (also $x \in \{0;\ \pm\pi;\ \pm 2\pi;\ \pm 3\pi; \ldots\}$)

Polstellen / Definitionslücken: keine

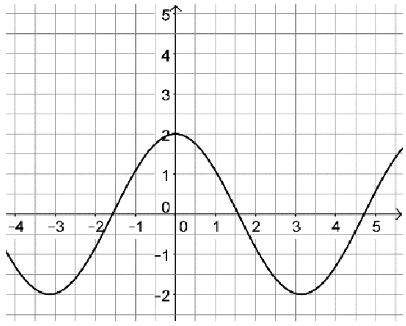
Symmetrie von f: Punktsymmetrie zum Ursprung

Grenzwerte / Asymptoten: keine

Ableitung: $f'(x) = \cos x$ / $g'(x) = a \cdot b \cdot \cos(bx + c)$

Stammfunktion: $F(x) = -\cos x + C$ / $G(x) = -\frac{a}{b} \cdot \cos(bx + c) + dx + C$

b) $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$ / allgemein: $\boldsymbol{g(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d}$



Nullstellen von f: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ (also $x \in \left\{\pm\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{3\pi}{2};\ \pm\frac{5\pi}{2};\ \pm\frac{7\pi}{2}; \ldots\right\}$)

Polstellen / Definitionslücken: keine

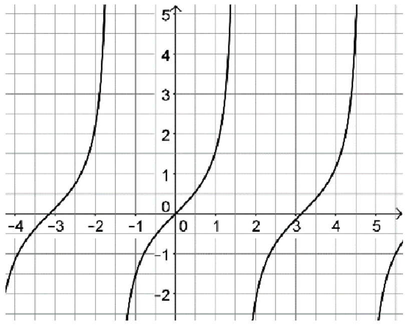
Symmetrie von f: Achsensymmetrie zur y-Achse

Grenzwerte / Asymptoten: keine

Ableitung: $f'(x) = -\sin x$ / $g'(x) = -a \cdot b \cdot \sin(bx + c)$

Stammfunktion: $F(x) = \sin x + C$ / $G(x) = \frac{a}{b} \cdot \sin(bx + c) + dx + C$

c) $\boldsymbol{f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$ / allgemein: $\boldsymbol{g(x) = a \cdot \tan(bx + c) + d}$



Nullstellen von f: NS des Zählers, also siehe a)

Polstellen / Definitionslücken: NS des Nenners, also siehe b)

Symmetrie von f: sin PuSy, cos ASy ⇨ unterschiedliche Symmetrien
⇨ tan hat Punktsymmetrie zum Ursprung

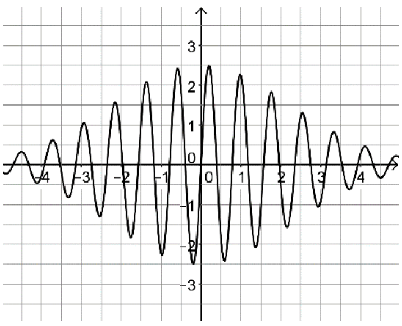
Grenzwerte / Asymptoten: senkrechte Asymptoten an den Polstellen (mit VZW)

Ableitung: mit Quotientenregel $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ / $g'(x) = \frac{a \cdot b}{\cos^2(bx+c)}$

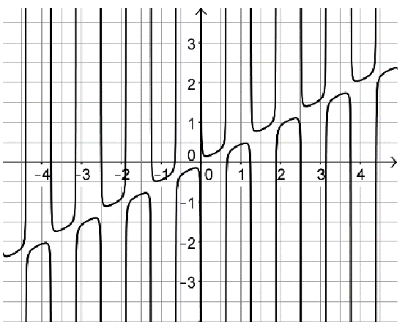
Stammfunktion: $F(x) = -\ln|\cos x| + C$
$G(x) = -\frac{a}{b} \cdot \ln|\cos(bx + c)| + dx + C$

11. … sowie Kombinationen durch Addition/Subtraktion/Multiplikation/Division/Verkettung dieser Typen

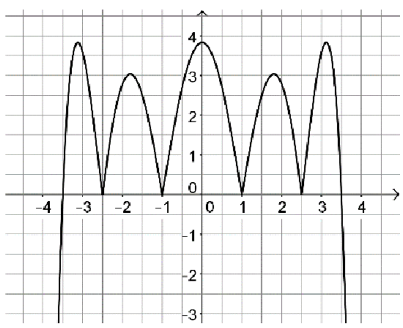
$f(x) = 2{,}5 \cdot e^{-0{,}1x^2} \cdot \sin(8x)$



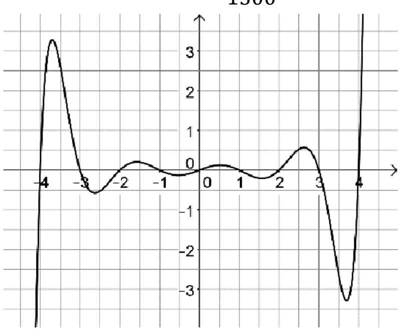
$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{0{,}05}{\sin(5x)}$



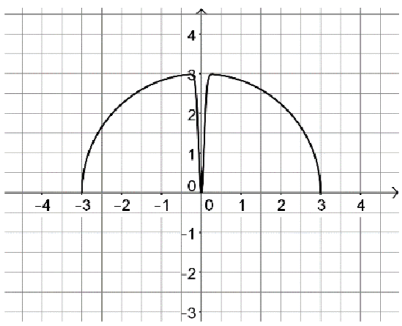
$f(x) = -\frac{|x-3{,}5| \cdot |x-2{,}5| \cdot |x-1| \cdot |x+1| \cdot |x+2{,}5| \cdot |x+3{,}5|}{20}$



$f(x) = \frac{x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)}{1500}$



$f(x) = \sqrt{9 - x^2} - 3\mathrm{e}^{-100x^2}$



$f(x) = 0{,}3x^2 + \frac{1}{2}\cos(20|x|^{1{,}2}) - 2$